

14.1 第一类曲线积分

2024年5月21日 星期二 12:07

第一类曲线积分

$\mathbb{R}^n$ 中的曲线方程的一般形式

$L: \vec{x} = \vec{x}(t), t \in [\alpha, \beta]$, 其中 $\vec{x}(t)$ 关于 t 连续 $P = \{\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_k = \beta\}$

$\sum_{i=1}^k \rho(\vec{x}(\xi_i)) \Delta S_i$ 其中 ΔS_i 为曲线在 $[t_{i-1}, t_i]$ 这一段的弧长

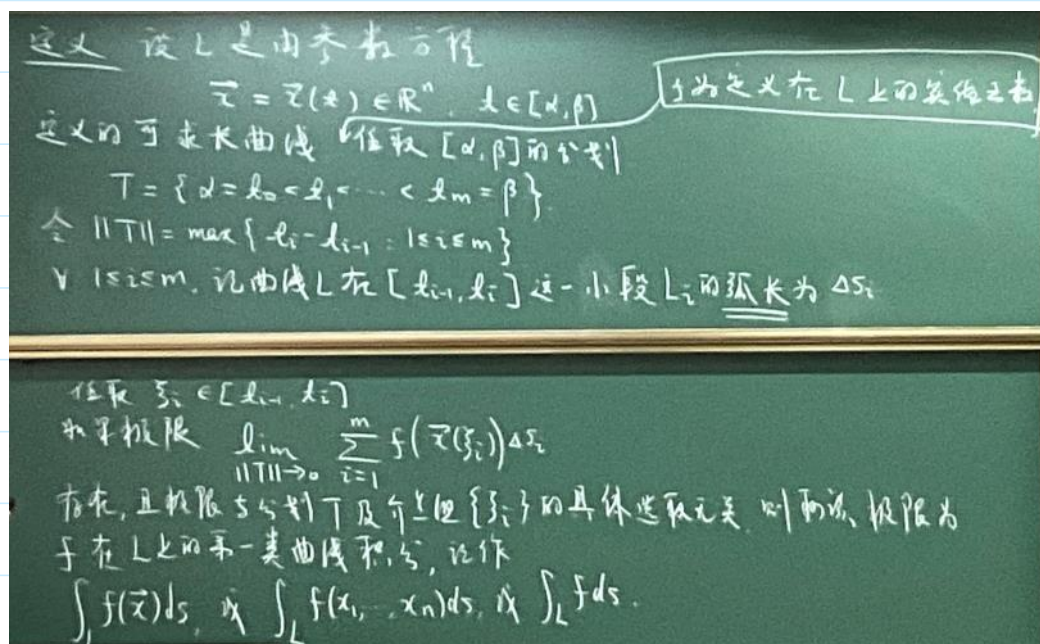
若 $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k \rho(\vec{x}(\xi_i)) \Delta S_i$ 存在, 则该极限值就是线的质量

设 $\mathbb{R}^n$ 中的曲线 L 由参数方程 $\vec{x} = \vec{x}(t)$ $t \in [\alpha, \beta]$ 给出, 其中 $\vec{x}(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$

上连续. ① 作分划 ② 求近似和 $\sum_{i=1}^k |\vec{x}(t_i) - \vec{x}(t_{i-1})|$

③ 若 $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k |\vec{x}(t_i) - \vec{x}(t_{i-1})|$ 存在 (且有限)

则称曲线 L 为可求长的, 并约上述极限为弧长



定义: 设 L 由参数方程 $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$ (1)

给出, 称 L 为光滑曲线, 如果它满足

(1) $x_i(t)$ 在 $t \in [\alpha, \beta]$ 上有连续的导函数

(2) 对 $\forall t \in [\alpha, \beta]$ $\sum_{i=1}^n x_i^2(t) \neq 0$

定理1: 若 L 是由方程 (1) 定义的光滑曲线, 则 L 是可求长的, 并且其弧长为

$$\int_a^b \sqrt{(x_1'(t))^2 + \dots + (x_n'(t))^2} dt \quad (*)$$

若 $\forall 1 \leq i \leq n$, 有 $x_i(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上可导, 则定义

$$\vec{x}'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t)) \quad t \in [\alpha, \beta]$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{x}(t+\Delta t) - \vec{x}(t)}{\Delta t}$$

$$\text{则 } (*) = \int_a^b |\vec{x}'(t)| dt$$

※ 上述定理对于分段光滑曲线仍然成立

定理2: 若 L 是由方程 (1) 定义的光滑曲线, 且 f 是 L 上的连续实值函数, 则 f 在 L 上的连续函数

, 则 f 在 L 上的第一类曲线积分存在: $\int_L f(\vec{x}) ds = \int_a^b f(\vec{x}(t)) |\vec{x}'(t)| dt \quad (2) \rightarrow$ 第一类曲线积分的计算公式

在定理2的条件下,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m f(\vec{x}(\xi_i)) \Delta s_i &= \sum_{i=1}^m f(\vec{x}(\xi_i)) \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\vec{x}'(t)| dt \\ &= \sum_{i=1}^m f(\vec{x}(\xi_i)) |\vec{x}'(\eta_i)| \cdot (t_i - t_{i-1}) \\ &\approx \sum_{i=1}^m \underbrace{f(\vec{x}(\xi_i)) |\vec{x}'(\xi_i)|}_{g(\xi_i)} \Delta t_i \\ &\xrightarrow{\|T\| \rightarrow 0} \int_a^b f(\vec{x}(t)) |\vec{x}'(t)| dt \end{aligned}$$

特别地: 当曲线 L 由 $y=y(x)$, $x \in [a, b]$ 给出时,

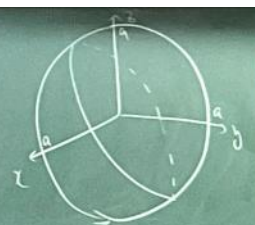
$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1+y'(x)} dx$$

性质: (1) 线性性

(2) 路径可加性

例2 计算 $I = \int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds$, 其中 L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 和平面 $x + y + z = 0$ 的交线.

$\frac{1}{3} \int_L x^2 ds = \int_L y^2 ds = \int_L z^2 ds$
 $= \frac{1}{3} \int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds$
 $\text{在 } L \text{ 上, } x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad \frac{a^2}{3} \int_L ds = \frac{2\pi a^3}{3}$



$\int_L z ds = \int_L x ds = \int_L y ds = \frac{1}{3} \int_L (x + y + z) ds$
 $\text{在 } L \text{ 上, } x + y + z = 0$
 $\text{所以 } \int_L z ds = \int_L x ds = \int_L y ds = 0$

$\text{从而 } I = \int_L x^2 ds + \int_L y^2 ds + 2 \int_L z ds = \frac{4\pi}{3} a^3$

利用对称性!

14.2 第二类曲线积分

2024年5月23日 星期四

14:28

关于曲线的一些基本概念

(1) 简单曲线: 在 $\mathbb{R}^n$ 中自己不相交的曲线 (除去首尾可能相交)

确切地: 设 L 由参数方程 $\vec{x} = \vec{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [\alpha, \beta]$ 表示,

则当 $t', t'' \in [\alpha, \beta]$, 且 $0 < |t' - t''| < \beta - \alpha$ 时, 必有 $\vec{x}(t') \neq \vec{x}(t'')$, 则

称 L 为 $\mathbb{R}^n$ 中的简单曲线

(2) 封闭曲线: 若 $\vec{x}(\alpha) = \vec{x}(\beta)$, 则称 L 为 $\mathbb{R}^n$ 中的封闭曲线

(3) 曲线的定向: 记 $A = \vec{x}(\alpha)$ $B = \vec{x}(\beta)$, 且设 L 是 $\mathbb{R}^n$ 中的简单曲线

$\left\{ \begin{array}{l} \text{若 } L \text{ 不封闭, 则从 } A \text{ 沿着 } L \text{ 到 } B, \text{ 和从 } B \text{ 沿着 } L \text{ 到 } A, \text{ 就确定了 } L \text{ 的两个不同方向} \\ \text{若 } L \text{ 封闭, 依旧有两个方向} \end{array} \right.$

总之可断言: 任意简单曲线有且仅有两个不同方向

定义: 设 L 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一条可求长的简单定向曲线, 由参数方程 $\vec{x} = \vec{x}(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$

给出, 设 L 的方向对应于参数 t 的增大方向, 设 $\vec{F}: L \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为定义在 L 上的向量值函数,

任取分划 $T = \{\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_m = \beta\}$

令 $\|T\| = \max\{t_i - t_{i-1} : 1 \leq i \leq m\}$

$\forall 1 \leq i \leq m$, 记 $\Delta \vec{x}_i = \vec{x}(t_i) - \vec{x}(t_{i-1})$ 任取 $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, 如果极限 $\lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \vec{F}(\vec{x}(\xi_i)) \cdot \Delta \vec{x}_i$ 存在

则称该极限值为 $\vec{F}$ 沿定向曲线 L 的第二类曲线积分, 记作 $\int_L \vec{F} d\vec{x}$

当 $n=3$ 时, 若 $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$

此时 $\vec{x}(t_i) = (x(t_i), y(t_i), z(t_i))$

则 $\sum_{i=1}^m \vec{F}(\vec{x}(\xi_i)) \cdot \Delta \vec{x}_i$

$= \sum_{i=1}^m P(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i)) (x(t_i) - x(t_{i-1}))$

$+ \sum_{i=1}^m Q(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i)) (y(t_i) - y(t_{i-1}))$

$+ \sum_{i=1}^m R(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i)) (z(t_i) - z(t_{i-1}))$

此时, 我们把 $\int_L \vec{F} d\vec{x}$ 写作 $\int_L Pdx + Qdy + Rdz$

当 $n=2$ 时, 若 $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$, 则把 $\int_L \vec{F} d\vec{x}$ 记作

$$\int_L Pdx + Qdy \quad \text{或} \quad \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

性质: (1) 线性性 (2) 路径可加性 (3) 方向性

设 $\vec{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \vec{F}(\vec{x}(\xi_i)) \cdot \Delta \vec{x}_i \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n F_j(\vec{x}(\xi_i)) (x_j(t_i) - x_j(t_{i-1})) \right) \end{aligned}$$

设 x_j 在 $[\alpha, \beta]$ 上可微 $\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n F_j(\vec{x}(\xi_i)) \cdot x_j'(\eta_{i,j}) \Delta t_i \right)$

x_j' 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续 $\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n F_j(\vec{x}(\xi_i)) \cdot x_j'(\xi_i) \right) \Delta t_i \xrightarrow[\text{连续}]{\forall_j F_j \text{ 在 } [\alpha, \beta] \text{ 上连续}} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{j=1}^n F_j(\vec{x}(t)) \cdot x_j'(t) \right) dt$

计算公式: 若 $L: \vec{x} = \vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的光滑定向

曲线, 设 L 的方向对应于 t 的增大方向, 设 $\vec{F}(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$ 为定义在 L 的向量值函数

并且 $\forall 1 \leq i \leq j$, $F_j(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 则

$$\int_L \vec{F} d\vec{x} = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{j=1}^n F_j(\vec{x}(t)) \cdot \vec{x}_j'(t) \right) dt$$

$n=3$ 时 $\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) z'(t)] dt$$

第一类: $\int_L f ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\vec{x}(t)) |\vec{x}'(t)| dt$

由于 (*) $= \left(\sum_{j=1}^n F_j(\vec{x}(t)) \cdot \frac{x_j'(t)}{|\vec{x}'(t)|} \right) |\vec{x}'(t)| dt$

$$= \left(\vec{F}(\vec{x}(t)) \cdot \frac{\vec{x}'(t)}{|\vec{x}'(t)|} \right) |\vec{x}'(t)| dt$$

所以 $\int_L \vec{F} d\vec{x} = \int_L \vec{F}(\vec{x}) \cdot \frac{\vec{x}'}{|\vec{x}'|} ds$

注意到 $\frac{x'_j(t)}{|\vec{x}'(t)|}$ 是切向量 $\vec{x}'(t)$ 与第 j 个坐标的正方向的夹角的余弦

记其为 $\cos(\theta_j)$

此时 $\int_L \vec{F} d\vec{x} = \int_a^b \left(\sum_{j=1}^n F_j(\vec{x}(t)) \cos \theta_j \right) |\vec{x}'(t)| dt = \int_L \left(\sum_{j=1}^n F_j(\vec{x}) \cos \theta_j \right) ds$

$n=2$ 时, $\int_L P(x,y) dx + Q(x,y) dy = \int_a^b [P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t)] dt$
 $= \int_L [P(x,y) \cos \alpha + Q(x,y) \cos \beta] ds$

其中 α, β 为切向量与 x, y 轴的夹角

14.3 第一、二类曲面积分

2024年5月30日 星期四 13:41

第一类曲面积分

定义: 设 Σ 是由 $\vec{r} = \vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in D$

确定的光滑曲面, 设 f 是定义在 Σ 上的实值函数

任取 D 的分割 $T = \{D_1, D_2, \dots, D_k\}$ $\forall 1 \leq i \leq k$, 记 $\Sigma_i = \vec{r}(D_i)$, 任取 $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$

若 $\lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k f(\vec{r}(\xi_i, \eta_i)) \sigma(\Sigma_i)$ 存在, 则称 f 在 Σ 上的第一类曲面积分存在, 且把该

极限称为 f 在 Σ 上的第一类曲面积分, 记作 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) ds$ 或 $\iint_{\Sigma} f ds$

$$\text{注意到 } \sigma(\Sigma_i) = \iint_{D_i} |\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)| du dv$$

$$\approx |\vec{r}_u(\xi_i, \eta_i) \times \vec{r}_v(\xi_i, \eta_i)| \sigma(D_i)$$

$$\sum_{i=1}^k f(\vec{r}(\xi_i, \eta_i)) \sigma(\Sigma_i) \approx \sum_{i=1}^k f(\vec{r}(\xi_i, \eta_i)) |\vec{r}_u(\xi_i, \eta_i) \times \vec{r}_v(\xi_i, \eta_i)| \sigma(D_i)$$

$$\xrightarrow{\text{若 } f \text{ 在 } \Sigma \text{ 上连续}} \iint_D f(\vec{r}(u, v)) |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv$$

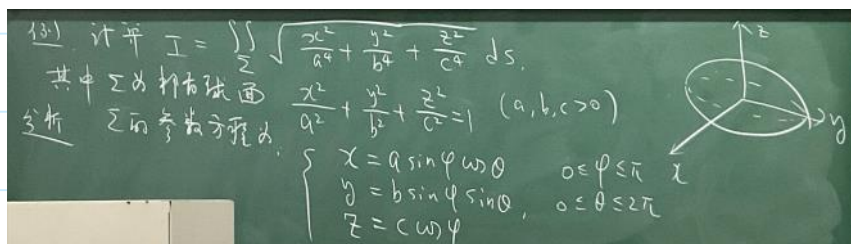
计算公式: 若 f 在 Σ 上连续, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) ds = \iint_D f(\vec{r}(u, v)) |\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)| du dv$$

$$= \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot |\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)| du dv$$

设 Σ 由 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$ 给出, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) ds = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)} dx dy$$



$$\text{由3} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_\varphi & y_\varphi & z_\varphi \\ x_\theta & y_\theta & z_\theta \end{vmatrix} = (bc \sin^2 \varphi \omega_\theta) \vec{i} - (ac \sin^2 \varphi \sin \theta) \vec{j} + (ab \sin \varphi \omega_\varphi) \vec{k}$$

$$\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_\theta = \text{于是 } |\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_\theta| = abc \sin \varphi \left[\frac{\omega_\theta^2 \sin^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{b^2} + \frac{\omega_\varphi^2}{c^2} \right]^{1/2}$$

$$\text{又 } \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}} = \left[\frac{\omega_\theta^2 \sin^2 \varphi}{a^2} + \dots \right]^{1/2}$$

$$\text{于是 } I = \iint_{0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi} abc \sin \varphi \left(\frac{\omega_\theta^2 \sin^2 \varphi}{a^2} + \dots \right) d\varphi d\theta$$

$$= \frac{4}{3} abc \pi \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)$$

曲面的面积

设曲面 Σ 的方程为

$$x = x(u, v) \quad y = y(u, v) \quad z = z(u, v) \quad (u, v) \in D$$

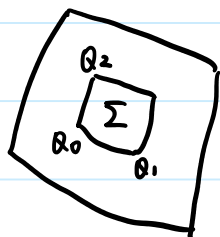
$$\text{即 } \vec{r}(u, v) = x(u, v) \vec{i} + y(u, v) \vec{j} + z(u, v) \vec{k} \quad (u, v) \in D$$

其中 D 是 uv 平面上由分段光滑围成的有界闭区域

若 $\vec{r}$ 是单射, 并且 $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ 具有连续的偏导数, 并且

$\forall (u, v) \in D, J = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}$ 的秩为 2, 则称曲面 Σ 是参数化的光滑

简单曲面, 简称光滑曲面



$$\vec{Q}_0 = \vec{r}(u_0, v_0) \quad \vec{Q}_1 = \vec{r}(u_0 + \Delta u, v_0) \quad \vec{Q}_2 = \vec{r}(u_0, v_0 + \Delta v)$$

$$\vec{Q}_0 \vec{Q}_1 = \vec{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \vec{r}(u_0, v_0) \approx \vec{r}_u(u_0, v_0) \cdot \Delta u$$

$$\vec{Q}_0 \vec{Q}_2 = \vec{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \vec{r}(u_0, v_0) \approx \vec{r}_v(u_0, v_0) \cdot \Delta v$$

$$\sigma(\Sigma_i) \approx |\vec{Q}_0 \vec{Q}_1 \times \vec{Q}_0 \vec{Q}_2| \approx |\vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0)| \cdot \Delta u \cdot \Delta v$$

曲面 Σ 的面积

$$\approx \sum_{i=1}^n |\vec{r}_u(\xi_i, \eta_i) \times \vec{r}_v(\xi_i, \eta_i)| \times \sigma(D_i) \quad (\xi_i, \eta_i) \in D_i$$

$$\text{当 } \|P\| \rightarrow 0 \quad \iint_D |\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)| du dv$$

对于以上定义中的光滑曲面 Σ , 规定它的面积为

$$\iint_D |\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)| du dv, \text{ 记作 } \sigma(\Sigma)$$

注意到 $\vec{r}_u = x_u \vec{i} + y_u \vec{j} + z_u \vec{k}$

$$\vec{r}_v = x_v \vec{i} + y_v \vec{j} + z_v \vec{k}$$

所以 $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$

特别地, 若 Σ 由方程 $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ 表示

其中 $f(x, y)$ 具有连续偏导数

则 $\vec{r}_x = \vec{i} + f_x \vec{k}$ $\vec{r}_y = \vec{j} + f_y \vec{k}$

从而 $\vec{r}_x \times \vec{r}_y = -f_x \vec{i} - f_y \vec{j} + \vec{k}$

$$\therefore |\vec{r}_x \times \vec{r}_y| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}$$

$\Rightarrow \sigma(\Sigma) = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx \, dy$

第二类曲面积分

给定光滑曲面 $\Sigma: \vec{r} = \vec{r}(u, v)$ $(u, v) \in D$

则 $\forall P \in \Sigma$, 存在 Σ 在点 P 的切平面, 于是可选取 Σ 在该点处

的单位法向量 $\vec{n}(P)$ (有两种选取方式), 若存在一种选取方法, 使得

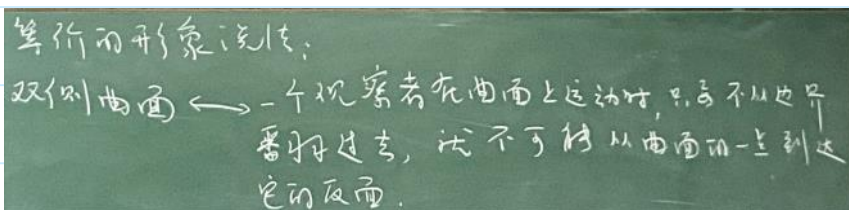
$$\Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$$

单侧曲面: Möbius 带

$$P \mapsto \vec{n}(P)$$

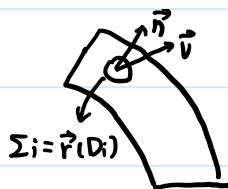
是 Σ 上的连续函数, 则称 Σ 是双侧曲面, (或者说, 是可定向的)

不然, 称 Σ 是单侧曲面



定义: 当一个双侧曲面 (可定向曲面) 确定正侧后, 称其为定向曲面

计算: 单位时间内, 水流从 Σ 的负侧到其正侧的总流量



在 Σ_i 上, 水流从其负侧到正侧的流速为:

$$\vec{n}(\vec{r}(x_i, y_i)) \cdot \vec{v}(\vec{r}(x_i, y_i))$$

单位时间内, 水流从 Σ_i 的负侧到正侧的流量为

$$\vec{n}(\vec{r}(x_i, y_i)) \cdot \vec{v}(\vec{r}(x_i, y_i)) \cdot \sigma(\Sigma_i)$$

$$\text{总流量} \approx \sum_{i=1}^k \vec{n}(\vec{r}(x_i, y_i)) \cdot \vec{v}(\vec{r}(x_i, y_i)) \cdot \sigma(\Sigma_i)$$

$$= \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k \vec{n}(\vec{r}(x_i, y_i)) \cdot \vec{v}(\vec{r}(x_i, y_i)) \cdot \sigma(\Sigma_i)$$

$$= \iint_{\Sigma} \vec{n} \cdot \vec{v} \, ds$$

定义: 设 Σ 是一个光滑的定向曲面, Σ 上确定其方向的法向量 $\vec{n}(x, y, z)$

设 $\vec{F}: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$, 则定义 $\vec{F}$ 在定向曲面 Σ 的第二类曲面积分为

$$\iint_{\Sigma} \vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{n}(x, y, z) \, ds, \text{ 如果该极限存在, 记为 } \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$$

$$\text{设 } \vec{n}(x, y, z) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \quad [\text{单位法向量}]$$

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

$$\text{则 } \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iint_{\Sigma} [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma] \, ds$$

$$\text{记 } dx \wedge dy = \cos \gamma \, ds$$

它是面积微元 ds 在 xy 表面上的投影.

$$\begin{cases} \text{当 } \cos \gamma > 0 \text{ 时 为正} \\ \text{当 } \cos \gamma < 0 \text{ 时 为负} \\ \text{当 } \cos \gamma = 0 \text{ 时 为 0} \end{cases}$$

$$\text{记 } dy \wedge dz = \cos \alpha \, ds \quad dz \wedge dx = \cos \beta \, ds$$

$$\text{则 } \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iint_{\Sigma} P \, dy \wedge dz + Q \, dz \wedge dx + R \, dx \wedge dy$$

$$\stackrel{\text{简写为}}{=} \iint_{\Sigma} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy$$

$$\Sigma: \vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad (u, v) \in D$$

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{n}(u, v) &= \pm \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} \\ \sigma(\Sigma_i) &\approx |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, \sigma(D_i) \end{aligned} \right.$$

从而当 F 在 Σ 上连续时, 有

$$\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \pm \iint_D \underbrace{\vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot (\vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v))}_{(*)} \, du \, dv$$

若 $\vec{F} = (P, Q, R)$, 有

$$(*) = \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = P \cdot \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q \cdot \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + R \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

↑ 法向量

若 $\Sigma: z = z(x,y), (x,y) \in D$

此时 $\vec{r}(x,y) = (x, y, z(x,y)), (x,y) \in D$

$$\vec{F}(\vec{r}(x,y)) \cdot (\vec{r}_x \times \vec{r}_y)$$

$$= \begin{vmatrix} P & Q & R \\ 1 & 0 & z_x \\ 0 & 1 & z_y \end{vmatrix} = -P \cdot z_x - Q \cdot z_y + R$$

$$\text{此时 } \iint_{\Sigma} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy = \pm \iint_D [-P \cdot z_x - Q \cdot z_y + R] \, dx \, dy$$

$$\text{特别地 } \iint_{\Sigma} R \, dx \, dy \stackrel{z=z(x,y)}{\substack{(x,y) \in D}} = \pm \iint_D R(x,y, z(x,y)) \, dx \, dy$$

↖ 法向量向上取 +

14.4 三大公式

2024年6月4日 星期二 10:23

格林公式 (第二类曲线积分 $\rightarrow$ 重积分)

单连通区域: 没有洞的区域

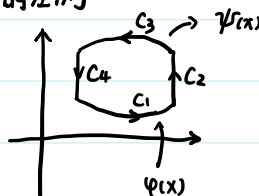


多(复)连通区域: 有洞的区域

区域D的正向边界: 当一个人沿着 ∂D 行走时, D总在人的左侧

设D是x型区域

$$D = \{(x, y) \mid \varphi(x) < y < \psi(x), x \in [a, b]\}$$



$$\int_{\partial D} P dx = \sum_{i=1}^4 \int_{C_i} P(x) dx = \int_{C_1} P dx + \int_{C_3} P dx$$

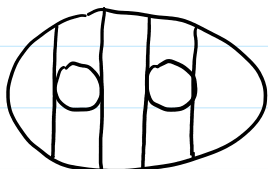
$$= \int_a^b P(x, \varphi(x)) dx - \int_a^b P(x, \psi(x)) dx$$

$$= - \int_a^b [P(x, \psi(x)) - P(x, \varphi(x))] dx$$

$$= - \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy \right] dx$$

$$= - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$

这对一般的"好"区域也成立



类似地, 对于y型区域D, 有

$$\int_{\partial D} Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$$

$$\text{从而 } \int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (1)$$

格林定理: 设D是 $\mathbb{R}^2$ 中由有限条分段光滑的曲线围成的闭区域,

设 $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$ 与 $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$ 都在D上

连续, 则有公式(1)成立, 其中 ∂D 为D的正向边界

$$\text{注(1): 公式(1)可写作 } \int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left| \frac{\partial}{\partial x} \begin{vmatrix} P \\ Q \end{vmatrix} \right| dx dy$$

注(2): 公式(1)可看作N-L公式的推广

注(3): 令 $Q(x,y)=x$, $P(x,y)=0$, 可得 $\sigma(D)=\int_{\partial D} x dy$

令 $Q(x,y)=0$, $P(x,y)=-y$ 可得 $\sigma(D)=-\int_{\partial D} y dx$

$$\Rightarrow \sigma(D) \triangleq \int_{\partial D} x dy - y dx$$

例2 计算积分 $I = \int_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$
其中 L 是单位圆, $x^2 + y^2 = 1$
取逆时针方向.



分析 L 是 D 的正向边界, 其中 $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$
(格林) 令 $P(x,y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$, $Q(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$. 则
 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2 - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$
 $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{x^2 + y^2 - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ $\Rightarrow$ 不连续(原点)

由格林公式 $I = \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx dy = 0$.
格林 = $I \stackrel{x^2 + y^2 = 1}{\text{在 } L \text{ 上}} \int_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \int_L x dy - y dx = 2 \iint_D dx dy = 2\pi \checkmark$

例3 计算积分 $I = \int_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$
其中 L 是一条分段光滑的闭曲线,
并且包围其所围区域的内部.
 L 取逆时针方向.



分析 取充分小的正数 ϵ , 使曲线
 $C_\epsilon: x^2 + y^2 = \epsilon^2$
位于 L 所围区域的内部, 并且取 C_ϵ 为逆时针方向
令 D_ϵ 为 L 与 C_ϵ 所围的区域
令 $P(x,y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$, $Q(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$

由格林公式, 可得
 $\int_{\partial D_\epsilon} P dx + Q dy = 0$, 其中 ∂D_ϵ 为 D_ϵ 的正向边界
注意到 $\partial D_\epsilon = L \cup (-C_\epsilon)$, 从而
 $0 = \int_L * + \int_{-C_\epsilon} * = \int_L * - \int_{C_\epsilon} *$
 $\Rightarrow \int_L * = \int_{C_\epsilon} * = \frac{1}{\epsilon^2} \int_{C_\epsilon} x dy - y dx = \frac{1}{\epsilon^2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \epsilon^2 = 2\pi$

曲线积分与路径无关的条件

定理1: 设 D 为平面上的单连通开区域, 若函数 P, Q $\frac{\partial P}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 都在

D 内连续, 则下面的四个命题等价

- (1) 对 D 内任意一条分段光滑的闭曲线 L , 有 $\oint_L P dx + Q dy = 0$
- (2) 对 D 内任意一条分段光滑的曲线 L , 曲线积分 $\int_L P dx + Q dy$

与路径无关, 只与 L 的起点与终点有关

(3) $Pdx + Qdy$ 是 D 内某函数 $u(x, y)$ 的全微分, 即在 D 内

$$du = Pdx + Qdy$$

(4) 在 D 内处处成立: $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

—— 曲线积分与路径无关性

运用到 $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ 连续性

(1) $\Rightarrow$ (2) $\checkmark$

(3) $\Rightarrow$ (4) $\checkmark$

(4) $\Rightarrow$ (1) $\checkmark$

(2) $\Rightarrow$ (3): 在 D 内任意取定 $A(x_0, y_0)$

$$\forall B(x, y) \in D, \text{ 由 (2), 可定义 } u(x, y) = \int_{AB} Pdx + Qdy$$

其中 AB 是 D 内以 A 为起点 B 为终点的一条分段光滑曲线

$\forall (x, y) \in D$, 取 $\delta > 0$, 使 $O(B, \delta) \subset D$, 任取 $\Delta x \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$, 设 C 为 $(x + \Delta x, y)$, 则

$$u(x + \Delta x, y) - u(x, y) \stackrel{(2)}{=} \int_{BC} Pdx + Qdy \quad (\text{其中 } BC \text{ 是以 } B \text{ 为起点, } C \text{ 为终点的线段})$$

$$= \int_x^{x+\Delta x} P(t, y) dt = P(x + \theta \Delta x, y) \cdot \Delta x \quad (\text{其中 } 0 \leq \theta \leq 1)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(x + \theta \Delta x, y) = P(x, y)$$

$$\text{同理: } \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$$

又 P 与 Q 在 D 内连续, 故 $u(x, y)$ 在 D 内可微.

注: 在设有 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 与 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 的连续性的假设之下, 仍有 (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3)

$$(3) \Rightarrow (2) \quad \text{设 } L \text{ 为 } \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t: \alpha \rightarrow \beta$$

且设 L 为光滑曲线, 则

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t)] dt$$

$$\text{注意到 } \frac{du(x(t), y(t))}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot x'(t) + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot y'(t) = (3)$$

$$\begin{aligned} \text{从而 } \int_L Pdx + Qdy &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{du(x(t), y(t))}{dt} dt \\ &= u(x(t), y(t)) \Big|_{\alpha}^{\beta} = u(B) - u(A) \end{aligned}$$

从而 (2) $\checkmark$

Gauss (高斯) 公式 (第二类曲面积分 $\rightarrow$ 重积分)

设 Ω 是 R^3 中由分片光滑的曲面围成的有界闭区域

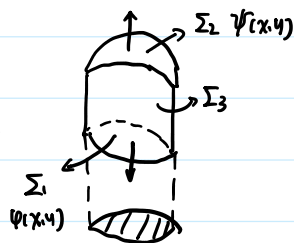
$$\text{问: } \iint_{\partial \Omega} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = ?$$



设 Ω 是 xy 型区域:

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y), (x, y) \in D_{xy}\}$$

看 $\iint_{\partial\Omega} R dx dy = ?$ ($\iint_{\partial\Omega} R \cos r ds$)



注意到对于 Σ_3 : 其法向量与 z 轴垂直, 从而 $\cos r = 0$

$$\begin{aligned} \text{从而 } \iint_{\partial\Omega} R dx dy &= \iint_{\Sigma_1} * + \iint_{\Sigma_2} * + \iint_{\Sigma_3} * \\ &= \iint_{D_{xy}} R(x, y, \psi(x, y)) dx dy - \iint_{D_{xy}} R(x, y, \varphi(x, y)) dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} \left[\int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right] dx dy \quad (\text{若 } \frac{\partial R}{\partial z} \text{ 在 } \Omega \text{ 中连续}) \\ &= \iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz \end{aligned}$$

同理可证: $\iint_{\partial\Omega} P dy dz = \iiint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz$

$$\iint_{\partial\Omega} Q dz dx = \iiint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz$$

Gauss 公式 (高斯公式) 设 Ω 是由 $\mathbb{R}^3$ 中分片光滑的曲面围成的

有界闭区域, 它可以同时分解为有限个 xy 型区域, yz 型区域, zx 型区域

若函数 P, Q, R 及 $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ 都在 Ω 上连续, 则 $\iint_{\partial\Omega} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$

其中 $\partial\Omega$ 的定向取为外例 $= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$

例: 设 $a > 0$, 求曲面 Σ 上

$$I = \iint_{\Sigma} (4xz dy dz - 2yz dz dx + (1-z^2) dx dy)$$

其中 Σ 是曲线 $z = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$ ($0 \leq y \leq a$) 绕 z 轴旋转一周生成的曲面.
定向取上侧

分析: $\Sigma: z = e^{\sqrt{x^2+y^2}}, (x, y) \in D$
其中 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$, 定向取上侧
令 $\Sigma_1: z = e^a, (x, y) \in D$, 定向取上侧
令 Ω 是由 Σ 与 Σ_1 所围成的区域, 则 $\partial\Omega = \Sigma \cup \Sigma_1$

令 $P = 4xz, Q = -2yz, R = 1 - z^2$, 则
 $\frac{\partial P}{\partial x} = 4z, \frac{\partial Q}{\partial y} = -2z, \frac{\partial R}{\partial z} = -2z \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$
从而由 Gauss 公式:
 $I = \iint_{\Sigma} * = \left(\iint_{\Sigma} * + \iint_{\Sigma_1} * \right) - \iint_{\Sigma_1} * \stackrel{\text{Gauss}}{=} \iiint_{\Omega} 0 dx dy dz - \iint_{\Sigma_1} *$
取 Σ_1 上侧, $\cos r = 0$
 $\cos \theta = 0$
 $\cos \phi = 1$
 $\iint_{\Sigma_1} R dx dy = - \iint_{\Sigma_1} R dx dy = - \iint_D [1 - e^{2a}] dx dy = (e^{2a} - 1) \cdot \pi a^2$

注1: 在应用 Gauss 公式时, 可能需要在“奇点”周围挖去一个洞 (球/椭圆)

注2: 可以应用 Gauss 公式计算立体的体积

$$V \equiv \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} x dy dz = \iint_{\partial\Omega} y dz dx = \iint_{\partial\Omega} z dx dy$$

$$= \frac{1}{3} \iiint_{\Omega} x dy dz + y dz dx + z dx dy \quad (\Omega \text{ 的定向取为外侧})$$

Stokes (斯托克斯) 公式 (Green 公式推广) [三维中第二类曲线积分 $\rightarrow$ 第二类曲面积分]

定义: 设 Σ 是带边的光滑定向曲面, 其边界 $\partial\Sigma$ 为简单曲线,

我们称 Σ 的方向诱导了 $\partial\Sigma$ 的方向, 或者说 $\partial\Sigma$ 的定向为 Σ

的 **诱导定向** 是指:

与 Σ 方向一致的 **单位法向量** 在 $\partial\Sigma$ 上沿这个方向前进时,

Σ 邻近此向量的部分总在该向量的左侧 (右手法则)

方向转化
右手定则
进一与
第一类曲面积分

Stokes 公式 设 Σ 是 $\mathbb{R}^3$ 中分片光滑的定向曲面, 其边界 $\partial\Sigma$ 是分段光滑的闭曲线,

若函数 P, Q, R 在 Σ 上具有连续偏导数, 则 $\oint_{\partial\Sigma} P dx + Q dy + R dz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dy dz & dz dx & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \quad (1)$

其中 $\partial\Sigma$ 的定向取为 Σ 的诱导定向

$$(1) \text{ 式右端} = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

$$(1) \text{ 式右端} = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

下面证明: 在特殊情形下, $\oint_{\partial\Sigma} P dx = \iint_{\Sigma} \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$.

设 Σ 为: $z = z(x, y), (x, y) \in D$, 方向向上

设 D 的 ∂D 的参数方程为: $x = x(t), y = y(t), t: \alpha \rightarrow \beta$.

则 $\partial\Sigma$ 的参数方程为:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(x(t), y(t)): t: \alpha \rightarrow \beta$$

$$\text{从而 } \oint P dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t), z(x(t), y(t))) \cdot x'(t) dt$$

$$\text{又注意到: } \oint_{\partial D} P(x, y, z(x, y)) dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t), z(x(t), y(t))) \cdot x'(t) dt$$

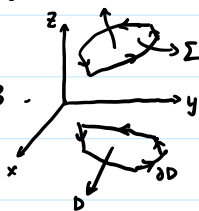
$$\text{所以 } \oint_{\partial\Sigma} P dx = \oint_{\partial D} P(x, y, z(x, y)) dx \quad \downarrow \text{格林公式}$$

$$= - \iint_D \frac{\partial}{\partial y} [P(x, y, z(x, y))] dx dy$$

$$= - \iint_D \left[\frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z(x, y)) + \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z(x, y)) \cdot \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) \right] dx dy$$

$$\text{注意到: } \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \iint_D \frac{\partial}{\partial y} [P(x, y, z(x, y))] dx dy$$

$$\text{所以只需证: } \iint_D \frac{\partial P}{\partial z} dz dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} dx dy \quad (2)$$



$$(2) \text{左端} = \iint_{\Sigma} \frac{\partial p}{\partial z} \cos \beta \cdot dS$$

$\Sigma: z = z(x, y) \ (x, y) \in D$, 方向向上,

法向量: $\pm (z_x, z_y, -1)$

与 Σ 方向一致的单位法向量为

$$\left(-\frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, -\frac{z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \right) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma).$$

$$= \iint_{\Sigma} \frac{\partial p}{\partial z} \left(-\frac{\partial z}{\partial y} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} dS = \text{右端}$$

定义: 区域 Ω 称为曲线单连通区域, 若 Ω 内任一封闭曲线皆

可以不经过 Ω 以外的点而收缩到属于 V 的一点.

不然, 称 Ω 为曲线多连通区域

单:



多:



曲面单连通区域: 含于 Ω 内的任一封闭曲面, 可以不经过 Ω 以外的点收缩到属于 V 的一点.